Programación Lineal. El modelo Matemático

1 Modelización

Definición 1.1 *Consideremos el problema de optimización con restricciones, definido como sigue*

$$\begin{array}{lll} Min & f(x) & \\ s.a. & g_i(x) \leq b_i & \forall\, i = 1, 2, ..., m \\ & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n & \end{array} \qquad (POR)$$

Dicha definición es general y dependiendo de la forma que tomen los diversos elementos del problema, obtendremos los distintos tipos de problemas que estudiaremos en el curso. Como veremos posteriormente la esencia del problema no cambia si consideramos que es de maximizar en vez de minimizar. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.1 *Rulisa fabrica masa para pasteles de tipo I y II. La de tipo I la vende a 5 euros el kilo, gastando 1 euro en ingredientes y 2 en mano de obra. La de tipo II se vende a 3 euros y cuestan 1 euro, tanto los ingredientes como el trabajo. Para hacer las masas se necesitan dos tipos de actividades: amasado y horneado. Rulisa dispone de 18 horas de amasado y 12 de horneado a la semana. La masa de tipo I necesita 2 horas de amasado y 3 de horneado, mientras que la de tipo II, necesita 3 de amasado y 1 de horneado. Si la cantidad de masa que se puede vender es ilimitada, optimizar los beneficios semanales de Rulisa.*

2 Elementos de un Problema de Programación Matemática

A partir de este caso real, vamos a formular el problema de programación matemática lineal correspondiente, identificando sus elementos.

1. **Variables de decisión.**

   Serán aquellas variables que describen los elementos sobre los que podemos decidir. Su determinación debe dar la solución del problema y su acertada elección simplificará mucho el planteamiento. Su elección no es unívoca y un problema de programación matemática puede estar correctamente planteado con elecciones distintas de las variables de decisión. En nuestro ejemplo se trata de saber la cantidad de masa de tipo I y II que hay que fabricar semanalmente. Por tanto,

   - Sea $x_1 \equiv$ Kilogramos de masa I a fabricar semanalmente.
   - Sea $x_2 \equiv$ Kilogramos de masa II a fabricar semanalmente.

2. **Función objetivo**

   Es la función que expresa lo que queremos optimizar (maximizar o minimizar).

   En nuestro caso se trata de maximizar la ganancia.

   $f(x) = (5 - 1 - 2)x_1 + (3 - 1 - 1)x_2 = 2x_1 + x_2.$

   Observación 2.1 *Obsérvese que* $Max f(x) = Min - f(x)$

3. **Las restricciones** Si el problema no tuviese restricciones la solución sería siempre infinito. Así que consideramos las restricciones en función de las variables de decisión definidas:

   - $2x_1 + 3x_2 \leq 18$. Tiempo máximo de amasado permitido.
   - $3x_1 + x_2 \leq 12$. Tiempo máximo de horneado permitido.

4. **Restricciones de signo** En nuestro caso

   - $x_1 \geq 0$
   - $x_2 \geq 0$
     Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que todas las variables son no negativas. Si no lo son, veremos métodos de transformación. Además de estas restricciones de signo, puede haber de integridad u otras, que ya veremos.

El problema queda formulado, como:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{array}$$

Definición 2.1 *Una función* $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *es lineal* $\Longleftrightarrow \exists\ c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

Definición 2.2 *Si* f *función lineal, entonces* $f(x_1, \cdots, x_n) \leq b$, *con* $b \in \mathbb{R}$, *es una restricción lineal.*

Definición 2.3 *Si la función objetivo y las restricciones son funciones lineales, el problema de optimización es un* ***Problema de Programación Matemática Lineal.***

Definición 2.4 *Llamaremos* ***región o conjunto factible*** *al conjunto de los puntos que verifican las restricciones, incluidas las de signo.*

En nuestro ejemplo sería:

$\mathbb{F} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$ *tal que* $2x_1 + 3x_2 \leq 18; 3x_1 + x_2 \leq 12; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0\}$

Los puntos del conjunto factible se llaman ***puntos factibles****.*

Observación 2.2 *Los conjuntos factibles de los problemas de programación lineal son poliedros.*

Definición 2.5 *Se define como* ***punto óptimo o solución óptima*** *a aquel punto factible que obtiene el mejor valor de la función objetivo.*

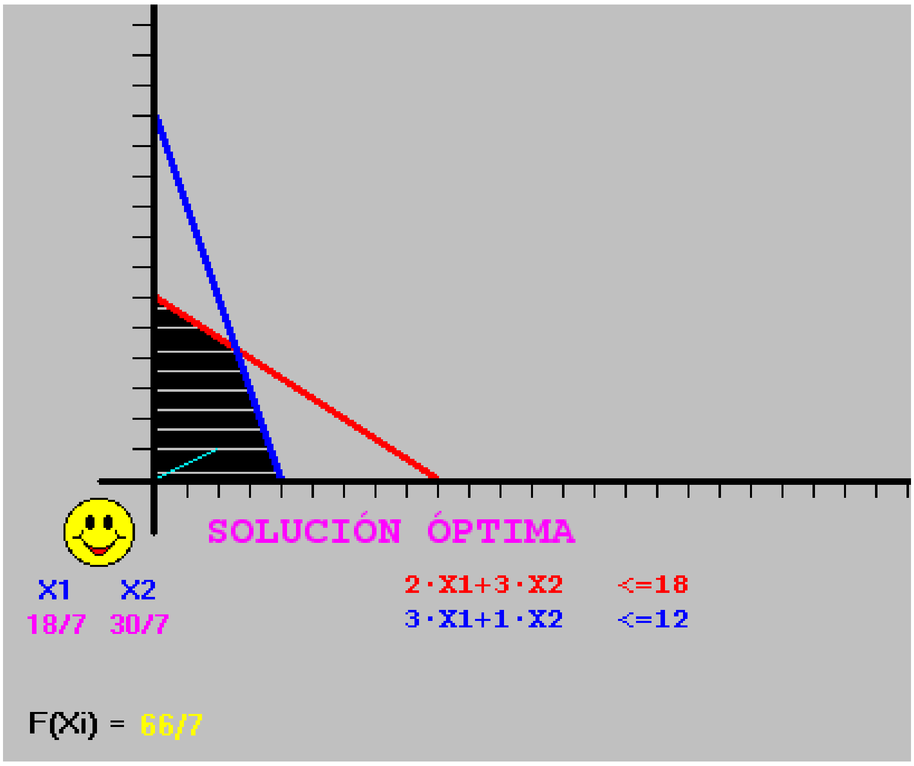
Observación 2.3 *El punto óptimo*

- *No tiene por qué existir.*
- *Si existe no tiene por qué ser único.*

3 Resolución gráfica

Una primera aproximación a la resolución de los problemas de programación de dos variables es hacerlo de forma gráfica.

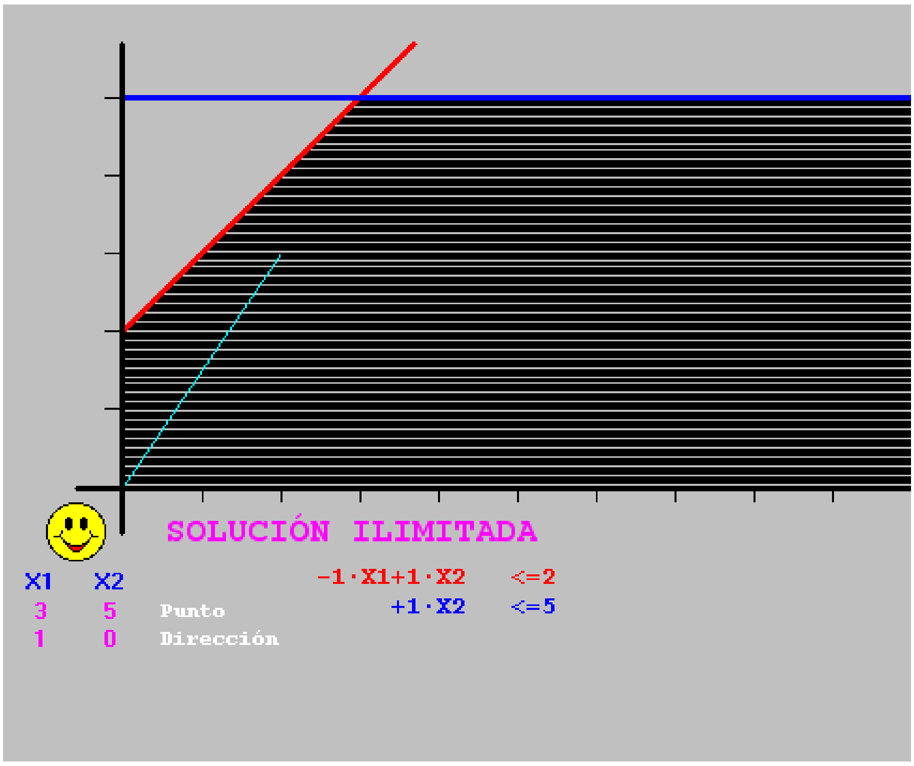
$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{array}$$



En este caso la solución es $(\frac{18}{7}, \frac{30}{7})$, que es finita y única. Pero no siempre ha de ser así, como veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.1

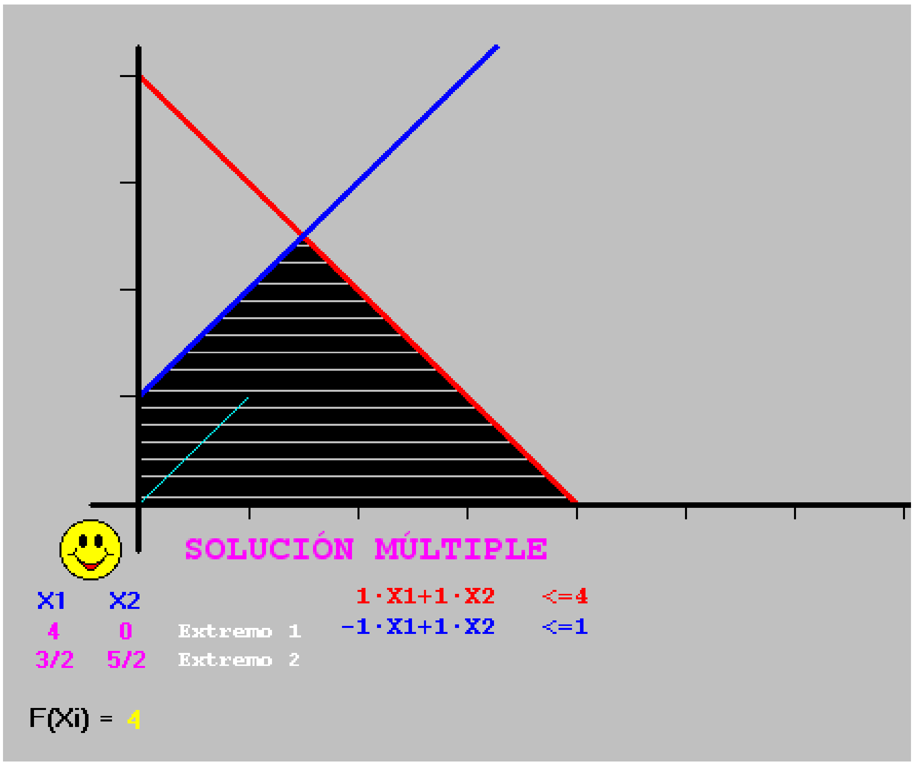
$$\begin{aligned} Max \qquad & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a: \qquad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$



El problema tiene solución infinita no acotada.

Ejemplo 3.2

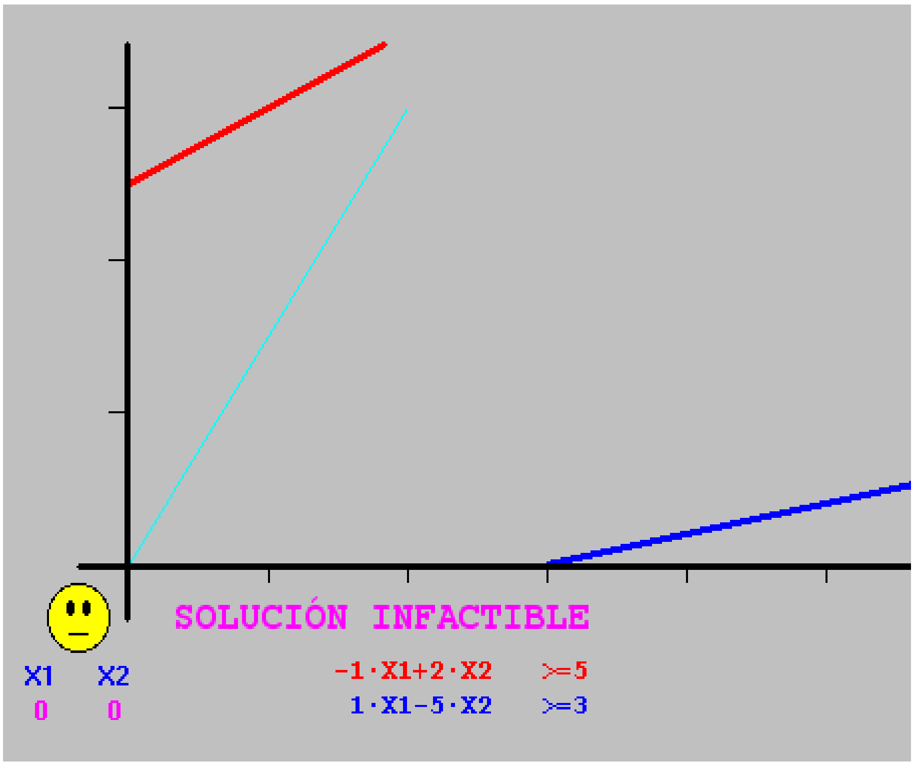
$$\begin{array}{ll} Max & x_1 + x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{array}$$



El problema tiene solución múltiple, $\lambda(4,0) + (1-\lambda)(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ *con* $\lambda \in [0,1]$.

Ejemplo 3.3

$$\begin{array}{ll} Max & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a: & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 - 5x_2 \geq 5 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{array}$$



El problema es infactible y no tiene solución.