

El algoritmo del Simplex. Forma tabular

1 Soluciones básicas factibles

Consideremos el siguiente poliedro $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que } Ax = b, x \geq 0\}$ con $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, ($m \leq n$), $x \geq 0$ y $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A, b) = m$.

Observación 1.1 *Suponer que todas las regiones factibles de un problema de programación lineal son de esa forma no supone pérdida de generalidad, como veremos posteriormente.*

Observación 1.2 *A partir de ahora, \mathbb{P} será siempre el que hemos definido anteriormente, salvo que se haga constar lo contrario de forma expresa.*

Definición 1.1 *Consideremos el poliedro \mathbb{P} . Si podemos reordenar las columnas de la matriz A de forma que $A = (B, N)$, donde B es una matriz invertible $m \times m$, entonces al punto $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, donde $x_B = B^{-1}b$ y $x_N = 0$, se le llama **solución básica**. Si además se verifica que $x_B \geq 0$, entonces se le nota por **solución básica factible***

Observación 1.3 *Nótese que x , definido como antes, es una de las soluciones del sistema de ecuaciones compatible indeterminado $Ax = b$.*

Observación 1.4 *Nótese que toda solución básica factible es un punto de \mathbb{P} .*

Observación 1.5 • B es la **matriz básica**.

- N es la **matriz no básica**.
- x_B son las **variables básicas**.
- x_N ó x_{NB} son las **variables no básicas**.

Ejemplo 1.1 Calcular las soluciones básicas factibles de la región determinada por las siguientes inecuaciones.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 6 \\x_2 &\leq 3 \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Lo primero que debemos hacer es convertir las desigualdades en igualdades, para lo que introducimos unas variables no negativas llamadas **variables de holgura** y que son auxiliares para el problema.

- $x_1 + x_2 \leq 6 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 6$.
- $x_2 \leq 3 \Rightarrow x_2 + x_4 = 3$.

Observación 1.6 Si las inecuaciones hubiesen sido en \geq , las variables de holgura hubiesen entrado con signo negativo, por ejemplo

$$x_1 + x_2 \geq 6 \Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 6.$$

Observación 1.7 Si no se exige la no negatividad de las variables, podemos hacer un cambio de variable, como veremos posteriormente.

Por tanto tenemos el siguiente poliedro escrito en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Tomamos de A, columnas que formen una matriz cuadrada invertible (2×2).
2. Consideremos las columnas 1 y 2. (a_1, a_2) .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_B = B^{-1}b = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que reordenando las columnas del vector queda $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ya que nuestro problema tiene 4 variables y x_3, x_4 valen 0, por ser no básicas.

3. Consideremos, ahora, las columnas 1 y 3 (a_1, a_3), pero en este caso B no es invertible.

4. Consideremos, ahora, las columnas 1 y 4. (a_1, a_4).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que reordenando las columnas del vector queda $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Consideremos, ahora, las columnas 2 y 3. (a_2, a_3).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que reordenando las columnas del vector queda $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Consideremos, ahora, las columnas 2 y 4. (a_2, a_4).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Como tiene componentes negativas es una solución básica, pero no factible.

7. Consideremos, ahora, las columnas 3 y 4. (a_3, a_4).

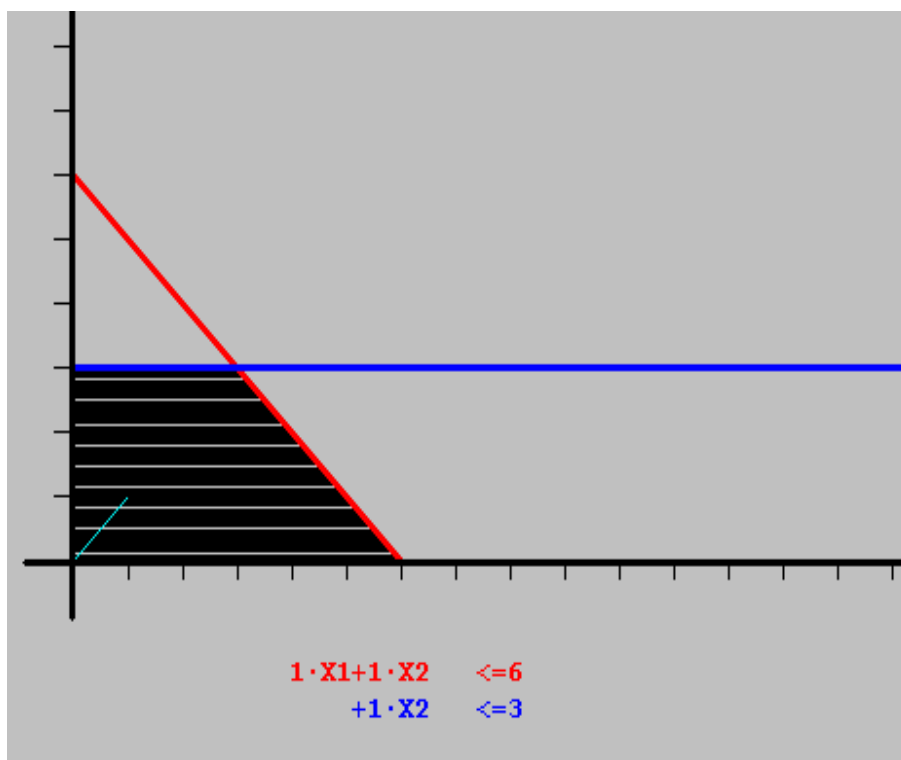
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que reordenando las columnas del vector queda $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

8. Si a los vectores obtenidos les quitamos las dos últimas componentes (variables de holgura que no forman parte del problema) nos quedan las siguientes soluciones básicas factibles.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos la región factible.



Observación 1.8 En este caso los puntos extremos de esa región (resolviendo gráficamente) coinciden con las soluciones básicas factibles. ¿Es casualidad?

La respuesta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 1.1 $x \in \mathbb{P}$ es solución básica factible $\iff x$ es punto extremo.

Corolario 1.1 Dado un poliedro \mathbb{P} , existe al menos un punto extremo.

Corolario 1.2 Dado un poliedro \mathbb{P} el número de puntos extremos es finito.

Observación 1.9 No puede haber más puntos extremos que posibles matrices básicas.

Definición 1.2 Consideremos el poliedro \mathbb{P} . $d \in \mathbb{P}$ es una dirección extrema \iff Podemos reordenar las columnas de la matriz A , con $A = (B, N)$, donde B es una matriz invertible $m \times m$, de forma que $B^{-1}a_j \leq 0$, para $a_j \in N$ y d es de la forma $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix}$, donde e_j es un vector de $n-m$ componentes con todos sus elementos igual a 0, menos el j que vale 1.

Corolario 1.3 *El número de direcciones extremas de un poliedro \mathbb{P} es finito*

Ejemplo 1.2 *Calcular las direcciones extremas de la región determinada por las siguientes inecuaciones.*

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Al igual que hicimos antes, buscamos la igualdad en las ecuaciones

- $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$.
- $x_2 + x_4 = 5$.

Por tanto, queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Consideremos las columnas 1 y 2, (a_1, a_2) .

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Ahora multiplicamos por las columnas no básicas (a_3, a_4) .

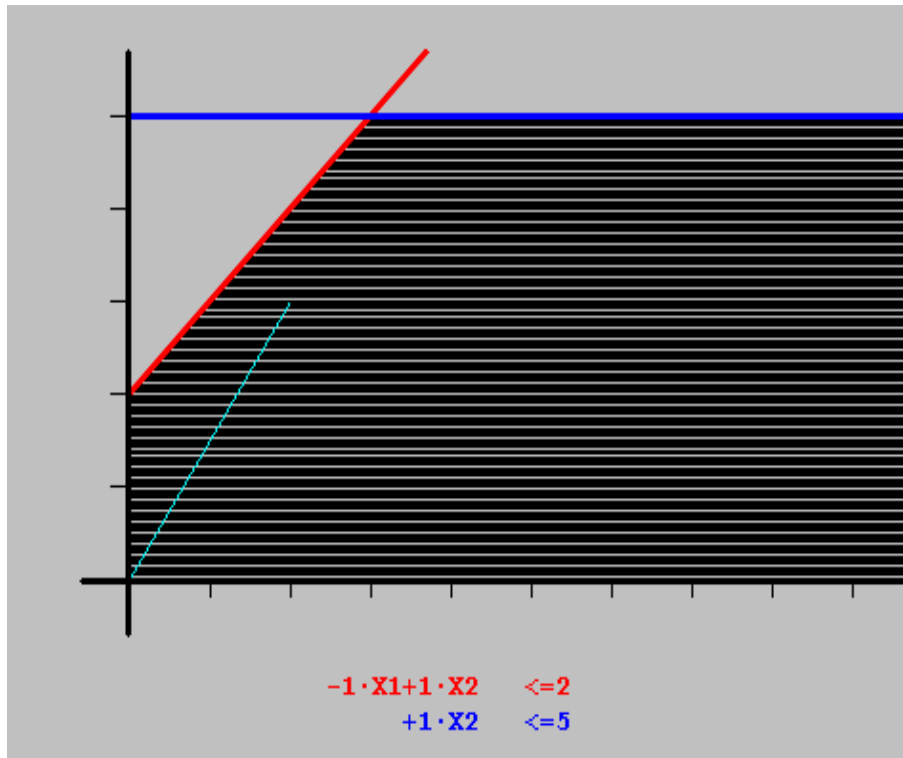
$$B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B^{-1}a_3$ cumple las hipótesis, así que, aplicando el teorema nos queda

$$d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_3 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que nos conduce a la siguiente dirección extrema $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si completamos el resto de posibilidades del ejemplo, se puede comprobar que dicha dirección es la única que existe en esa región.

Veámoslo de forma gráfica.



2 Condición necesaria y suficiente de optimalidad

Consideremos el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } c^t x &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \\
 \text{s.a. } Ax &= b \\
 x &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{PPL}$$

Observación 2.1 • *El vector c es el vector de costes.*

- *b es el término independiente o vector de recursos.*
- *A es la matriz de coeficientes tecnológicos.*

Observación 2.2 *El considerar el problema de minimizar, en vez de maximizar, no se pierde generalidad como hemos visto anteriormente, pues si es de maximizar, basta con cambiar de signo al vector de costes .*

Teorema 2.1 *Consideremos el (PPL) y sean x_1, \dots, x_k y d_1, \dots, d_l sus puntos extremos y direcciones extremas, respectivamente. (PPL) tiene una solución óptima finita \iff se verifica que $c^t d_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, l$.*

Demostración \Rightarrow Sea x un punto factible \Rightarrow (por el teorema de representación de conjuntos poliédricos) se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j,$$

donde x_1, \dots, x_k son los puntos extremos y d_1, \dots, d_l son las direcciones extremas y además $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k; \mu_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, l$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Por tanto,

$$c^t x = c^t \left[\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j \right] = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^t x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j c^t d_j.$$

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $\exists d_r$, tal que $c^t d_r < 0$, lo que significa que no existe solución finita, porque puedo tomar μ_r tan grande como quiera y el resto de las μ_j hacerlas cero. Así el segundo término de la igualdad está no acotado.

\Leftarrow Por otro lado, supongamos que $c^t d_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, l$, con lo que, al igual que antes

$$c^t x = c^t \left[\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j \right] = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^t x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j c^t d_j$$

para cada x factible. Como queremos minimizar $c^t x$, lo que debemos es determinar los valores de λ_i y μ_j para que el valor de la función objetivo sea mínimo. Como se verifica la condición de optimalidad, entonces debemos tomar los $\mu_j = 0$, pues sólo hacen aumentar el valor de la función objetivo. Así pues, tenemos $c^t x = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^t x_i$. Para simplificar notemos por u_i a los valores $c^t x_i$ que son constantes para todos los puntos del poliedro. Con lo que

$$c^t x = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$$

Para encontrar el mínimo de esa expresión lo que debemos hacer es determinar el mínimo de los u_i , que supongamos es u_r y hacer $\lambda_r = 1$ y el resto de los $\lambda_i = 0$. Con lo que el mínimo alcanza en el punto $x = x_r$, que es un punto extremo.

Observación 2.3 *De la demostración se deduce que la solución de un (PPL) con solución óptima finita es necesariamente un punto extremo (como habíamos comprobado gráficamente).*

Observación 2.4 *Si el problema es de maximizar, en la condición hay que cambiar el vector c de signo, con lo que la condición de optimalidad queda $c^t d_j \leq 0, \forall j = 1, \dots, l$.*

Observación 2.5 *Aplicando lo que sabemos hasta ahora, ya tenemos un primer procedimiento para resolver los (PPL).*

1. *Determinar todos los puntos extremos del (PPL), que son las soluciones básicas factibles.*
2. *Evaluar los puntos extremos con la función objetivo (sabemos que hay un número finito).*
3. *Quedarnos con el de mejor valor.*

En cualquier caso, veremos procedimientos más efectivos.

3 El algoritmo del simplex

La idea del algoritmo es:

1. Partir de un punto extremo.
2. Comprobar si es el óptimo. Si lo es STOP.
3. En caso de que no lo sea, encontrar otro punto extremo que mejore el valor de la función objetivo.
4. ir a 2.

Sea \bar{x} un punto extremo que, como sabemos, es una solución básica factible. Por tanto, podemos descomponer la matriz $A = (B, N)$, con $B_{m \times m}$ invertible. Esto implica, por ser factible, que:

$$A\bar{x} = b \Rightarrow (B, N) \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = b \Rightarrow B\bar{x}_B + N\bar{x}_N = b \Rightarrow \bar{x}_B = B^{-1}b = \bar{b},$$

pues $\bar{x}_N = 0$, por ser variables no básicas. En este punto nos preguntamos ¿Es \bar{x} el óptimo? Para ello, lo comparamos con un punto x cualquiera factible. Por ser x factible, se verifica que

- $Ax = b$
- $x \geq 0$

vamos a calcular el valor de la función objetivo en \bar{x} y x .

$$c^t \bar{x} = (c_B^t, c_N^t) \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = c_B^t \bar{x}_B + c_N^t \bar{x}_N = c_B^t \bar{x}_B.$$

Observación 3.1 Recordemos que para que el producto matricial no varíe debemos reordenar todos los elementos de las matrices.

Por otro lado, reordenamos el vector x de la misma manera que \bar{x} , aunque ahora no podemos afirmar que $x_N = 0$.

$$c^t x = (c_B^t, c_N^t) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B^t x_B + c_N^t x_N.$$

Por ser x factible tenemos que $Ax = b \Rightarrow$

$$(B, N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Como $\bar{x}_B = B^{-1}b$, entonces tenemos que

$$x_B = \bar{x}_B - B^{-1}Nx_N.$$

Por tanto la función objetivo en x vale

$$\begin{aligned} c^t x &= c_B^t (\bar{x}_B - B^{-1}Nx_N) + c_N^t x_N = c_B^t \bar{x}_B - c_B^t B^{-1}Nx_N + c_N^t x_N = \\ &= c_B^t \bar{x}_B + x_N (-c_B^t B^{-1}N + c_N^t) = c^t \bar{x} - (c_B^t B^{-1}N - c_N^t)x_N. \end{aligned}$$

Lo que nos permite comparar los valores de las funciones objetivo. Así pues tenemos que

$$c^t \bar{x} \leq c^t x \iff (c_B^t B^{-1}N - c_N^t)x_N \leq 0.$$

o lo que es lo mismo, ya que $x_N \geq 0$,

$$c_B^t B^{-1}N - c_N^t \leq 0.$$

que es la condición de optimalidad de \bar{x} .

Observación 3.2 Obsérvese que la condición de optimalidad no depende de x . Por tanto, dado un punto extremo cualquiera, se puede saber si es el óptimo o no directamente, sin compararlo con los restantes.

Observación 3.3 Al vector $c_B^t B^{-1} N - c_N^t$ se le denota como $z_j - c_j$ y es un vector de $n-m$ componentes. Se le llama **vector de costes reducidos o precios sombra**.

Supongamos ahora que nuestro punto extremo \bar{x} no es óptimo, pues no se verifica la condición de optimalidad y tenemos que el vector de costes reducidos $c_B^t B^{-1} N - c_N^t \not\leq 0$, o sea $\exists j$, tal que $c_B^t B^{-1} a_j - c_j > 0$, ó lo que es equivalente $c_j - c_B^t B^{-1} a_j < 0$.

Observación 3.4 Obsérvese que ahora j determina una componente específica del vector $z_j - c_j$.

Observación 3.5 Obsérvese que puede haber otras componentes que verifiquen lo mismo además de la j .

La estrategia, ahora pasa por construir un nuevo punto x que verifique:

1. Sea factible.
2. Tenga mejor valor en la función objetivo.
3. Sea también extremo.

Construimos $x = \bar{x} + \lambda d_j$, donde $d_j = \begin{pmatrix} -B^{-1} a_j \\ e_j \end{pmatrix}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, verificando $\lambda > 0$.

1. Para ello hay que probar que

(a) $Ax = b$.

$$Ax = A(\bar{x} + \lambda d_j) = A\bar{x} + \lambda A d_j = b + \lambda(B, N) \begin{pmatrix} -B^{-1} a_j \\ e_j \end{pmatrix} = b + \lambda(-a_j + a_j) = b$$

- (b) $x \geq 0$. Lo veremos posteriormente.

- 2.

$$c^t x = c^t (\bar{x} + \lambda d_j) = c^t \bar{x} + \lambda c^t d_j = c^t \bar{x} + \lambda (c_B^t, c_N^t) \begin{pmatrix} -B^{-1} a_j \\ e_j \end{pmatrix} = c^t \bar{x} + \lambda (-c_B^t B^{-1} a_j + c_j)$$

lo que implica que $c^t x < c^t \bar{x}$, cuando $c_B^t B^{-1} a_j - c_j = z_j - c_j > 0$, que es la hipótesis de partida.

Observación 3.6 Obsérvese que la diferencia entre $c^t x$ y $c^t \bar{x}$ es $\lambda(c_B^t B^{-1} a_j - c_j)$, lo que será de utilidad a la hora de escoger la componente que entra en la base, como posteriormente veremos.

Observación 3.7 Obsérvese que si $-c_B^t B^{-1} a_j + c_j = 0$, x y \bar{x} tienen el mismo valor en la función objetivo, lo que implica que tenemos una solución múltiple, como posteriormente veremos.

Nos quedaba pendiente probar que $x \geq 0$, lo que haremos a la vez que el apartado 3.

3. Llamemos y_j al vector de m componentes $B^{-1} a_j = (y_{1j}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{mj})$ y hagamos disjunción de casos.

(a) Supongamos que el vector $y_j \leq 0$. Si $y_j \leq 0 \Rightarrow d_j \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ ya que $x = \bar{x} + \lambda d_j$ y todas las componentes del vector son positivas. En este caso el problema no tiene solución acotada, pues el valor de la función objetivo en x decrece cuanto queramos, sin más que aumentar λ . De hecho, d_j es una dirección extrema y se verifica que:

$$c^t d_j = (c_B^t, c_N^t) \begin{pmatrix} -B^{-1} a_j \\ e_j \end{pmatrix} = -c_B^t B^{-1} a_j + c_j < 0,$$

por lo que el problema es no acotado sin más que aplicar el teorema 2.1 de optimalidad de la Programación Lineal.

(b) Supongamos ahora que el vector $y_j \not\leq 0$, lo que significa que alguna de sus componentes es estrictamente mayor que 0. La estrategia es ahora escoger un λ adecuado para que x sea mayor que 0. Lo que no es difícil haciendo λ suficientemente pequeño. Pero lo que haremos será determinarlo de forma que $x \geq 0$ y además sea un punto extremo. Sea por tanto

$$\lambda = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}}, \text{ tal que } y_{ij} > 0 \right\}$$

Observación 3.8 Recuérdese que $\bar{b} = B^{-1} b = x_B$.

Observación 3.9 λ está bien definido porque por hipótesis $y_j \not\leq 0$, lo que significa que al menos una de sus componentes es estrictamente mayor que 0.

Como el conjunto definido es finito, entonces $\exists r \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\lambda = \bar{b}_r / y_{rj}$. Veamos que con ese λ , se verifica que $x \geq 0$.

- Para las componentes básicas de x , o sea, las m primeras (excepto x_r), tenemos

$$x_i = \bar{b}_i + \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}}(-y_{ij}).$$

- En el caso de que $y_{ij} \leq 0 \Rightarrow x_i \geq 0$, obviamente.
- Si $y_{ij} > 0$. Entonces

$$x_i \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}}y_{ij} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} \geq \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}},$$

pero eso es cierto por la definición de λ . Por lo que en cualquiera de los dos casos $x_i \geq 0$ en las componentes básicas.

- Veamos como queda la componente básica x_r .

$$x_r = \bar{b}_r - \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}}y_{rj} = \bar{b}_r - \bar{b}_r = 0,$$

por lo que sale de la base.

- La componente no básica x_j queda

$$x_j = 0 + \lambda = \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}}$$

y entra en la base.

- El resto de las no básicas valen 0, por la definición de x .

Así pues hemos probado que $x \geq 0$ en cualquier caso. Además x es un punto extremo, porque si a la matriz B de \bar{x} le sustituimos la columna a_r por a_j , las nuevas columnas son linealmente independientes y por tanto forman una nueva base. Así pues como hemos cambiado de base, hemos pasado de un punto extremo a otro.

En estas condiciones ya podemos enunciar **El algoritmo del Simplex (Dantzing, 1947-2005)**.

Consideremos el problema (PPL)

1. Encontrar un punto extremo \bar{x} con una base B .
2. Calcular el vector de costes reducidos $z_j - c_j = c_B^t B^{-1} N - c_N^t$

- (a) Si $z_j - c_j \leq 0$, entonces \bar{x} es el óptimo. STOP
- (b) Si $z_j - c_j \not\leq 0$, sea j tal que $c_B^t B^{-1} a_j - c_j = \text{Max}\{c_B^t B^{-1} N - c_N^t\}$, o sea x_j es la componente que peor cumple la condición de optimalidad. Por tanto, x_j entra en la base.
- i. Si $y_j = B^{-1} a_j \leq 0$, entonces se tiene una solución ilimitada en la dirección

$$d_j = \begin{pmatrix} -B^{-1} a_j \\ e_j \end{pmatrix} \text{ con el punto } x = \bar{x} + \mu d_j, \mu > 0.$$

- ii. Si $y_j \not\leq 0$, entonces ir a paso 3.

3. Calcular la componente r básica que verifica que

$$\lambda = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Min}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} \text{ tal que } y_{ij} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}}.$$

Por tanto, x_r sale de la base. Pivotamos y calculamos el nuevo punto extremo con la nueva base.

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} y_{ij} \quad i = 1, \dots, m \text{ con } i \neq r \\ x_r &= 0 \text{ sale de la base} \\ x_j &= \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} \text{ y entra en la base} \end{aligned}$$

4. Formar una nueva base B , sustituyendo a_r por a_j . Ir a 2.

El algoritmo del simplex va de punto extremo en punto extremo, parando cuando encuentra el óptimo. El algoritmo converge porque el número de puntos extremos es finito.

Observación 3.10 *El algoritmo sólo necesita que la variable que entre en la base no cumpla la condición de optimalidad. El que escojamos la que peor la cumple es una condición adicional no imprescindible aunque, en general, nos lleva al óptimo en menos iteraciones. El motivo es que la mejora en la función objetivo con el nuevo punto extremo, como ya vimos, viene determinada por la expresión:*

$$\lambda(-c_B^t B^{-1} a_j + c_j) = -\lambda(z_j - c_j),$$

por lo que escogemos el mayor de uno de los componentes de ese producto ($z_j - c_j$)

Observación 3.11 En el caso de que una componente no básica $z_j - c_j = 0$, si introducimos la variable x_j en la base es evidente que el valor de la función objetivo no varía. Así pues, cuando estemos en un punto que verifique la condición de optimalidad con una de sus componentes no básicas x_j , verificando $z_j - c_j = 0$, eso significa la existencia de una posible solución múltiple, que encontraremos introduciendo a x_j en la base y procediendo en la forma habitual que exige el algoritmo.

Observación 3.12 Una vez escogida la variable que sale de la base, la que entra está determinada por el valor de λ , y sólo puede entrar la variable que verifique la condición exigida. O sea, en la variable de entrada hay cierto margen de discrecionalidad, pero no en la de salida, salvo empates.

4 Simplex en forma tabular

El algoritmo del simplex usado de forma matricial, tal y como hemos visto, es muy laborioso y es fácil cometer errores. La manera más natural de abordarlo es usando tablas, como veremos. Para ello, daremos una tabla general de un (PPL) de minimizar, en la que sin pérdida de generalidad supondremos que las variables básicas son las m primeras.

		x_1	\cdots	x_m	x_{m+1}	\cdots	x_j	\cdots	x_n	
x_1	c_1				$y_{1,m+1}$	\cdots	y_{1j}	\cdots	y_{1n}	\bar{b}_1
\vdots	\vdots				\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_r	c_r			I	$y_{r,m+1}$	\cdots	y_{rj}	\cdots	y_{rn}	\bar{b}_r
\vdots	\vdots				\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	c_m				$y_{m,m+1}$	\cdots	y_{mj}	\cdots	y_{mn}	\bar{b}_m
		0	\cdots	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	\cdots	$z_j - c_j$	\cdots	$z_n - c_n$	z

Observación 4.1 Las variables básicas forman la identidad en la tabla.

Observación 4.2 Por z denotamos el valor de la función objetivo.

Observación 4.3 Las componentes básicas del vector $z_j - c_j$ valen cero.

Observación 4.4 La matriz formada por los vectores $(y_{m+1}, \dots, y_j, \dots, y_n)$ es, en realidad, $B^{-1}N$, pues $y_j = B^{-1}a_j$.

Supongamos que no se verifica la condición de optimalidad. Sea

$$z_j - c_j = \underset{m+1 \leq i \leq n}{Max} \{z_i - c_i\}$$

Si $y_j \not\leq 0$, con lo que la solución no es ilimitada, entonces sea

$$\lambda = \underset{1 \leq i \leq m}{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}}, \text{ tal que } y_{ij} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}},$$

por lo que x_r sale de la base. En este punto pivotamos sobre y_{rj} , que consiste en, mediante transformaciones elementales de filas, conseguir un 1 en la posición y_{rj} , y ceros en los restantes elementos de la columna. Con eso conseguimos recuperar la matriz identidad formada por las variables básicas.

Observación 4.5 *El proceso de pivotaje es equivalente a multiplicar la tabla por la inversa de la nueva matriz básica.*

Ejemplo 4.1 *Retomemos nuestro problema inicial*

$$\begin{aligned} Max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Lo primero es ponerlo en restricciones de igualdad, introduciendo variables de holgura.

$$\begin{aligned} Max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ & 3x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

En este caso hay un punto extremo inicial muy sencillo, que es el asociado a las variables x_3, x_4 y, por tanto, las columnas a_3 y a_4 , que forman la identidad. Así, la primera tabla queda:

		2	1	0	0	
x_3	0	2	3	1	0	18
x_4	0	3	1	0	1	12
		-2	-1	0	0	0

Observación 4.6 *En la primera fila hemos puesto el vector de costes, en vez del nombre de las variables, pues es más operativo.*

Observación 4.7 La ventaja de partir de una matriz básica identidad es que para la primera tabla podemos copiar la matriz A directamente. **En otro caso, tendríamos que multiplicarla por B^{-1} .**

La variable que sale de la base se obtiene de calcular el $\min\{-2, -1\}$ que son los valores del vector de costes reducidos que no verifican la condición de optimalidad, recuérdese que el problema es de maximizar, por tanto x_1 entra en la base. La variable que sale de la base se obtiene como $\text{Min}\{\frac{18}{2}, \frac{12}{3}\} = 4$, así pues es x_4 . Pivotamos y obtenemos la siguiente tabla.

		2	1	0	0	
x_3	0	0	7/3	1	-2/3	10
x_1	2	1	1/3	0	1/3	4
		0	-1/3	0	2/3	8

En este caso, la variable que entra en la base es x_2 , pues es la única que no verifica la condición de optimalidad, y la que sale se deduce de $\text{Min}\{\frac{10}{7/3}, \frac{4}{1/3}\} = \text{Min}\{\frac{30}{7}, 12\} = \frac{30}{7}$, por lo que sale x_3 . Y la tabla queda:

		2	1	0	0	
x_2	1	0	1	3/7	-2/7	30/7
x_1	2	1	0	-1/7	3/7	18/7
		0	0	1/7	4/7	66/7

Como se cumple la condición de optimalidad, estamos en el óptimo. La solución es $(\frac{18}{7}, \frac{30}{7})$, con un valor de la función objetivo igual a $\frac{66}{7}$.

Observación 4.8 En nuestro caso la base óptima está formada por las columnas (a_2, a_1) .

Observación 4.9 Obsérvese que hay que respetar el orden de las columnas de A , tal y como aparecen en la tabla.

Así tenemos que

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la tabla final es la matriz A del problema original multiplicada por B^{-1} y eso ocurre con todas las tablas.

Ejemplo 4.2

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a:} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Lo primero es ponerlo en restricciones de igualdad, introduciendo variables de holgura.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a:} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_2 + x_4 = 5 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

La primera tabla queda:

$$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \\ \hline \begin{array}{c|ccc|c} x_3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \\ \hline -2 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Entra x_2 y sale x_3 .

Observación 4.10 En este caso, hemos aplicado la regla del simplex de forma estricta, pero se obtiene la solución de forma más rápida si decidimos que entre x_1 , aunque no sea el que peor cumple la condición de optimalidad, ya que nos sale que el problema es ilimitado en esta primera iteración.

En cualquier caso seguimos de la forma habitual.

$$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \\ \hline \begin{array}{c|ccc|c} x_2 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \\ \hline -5 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 6 \end{array}$$

Entra x_1 y sale x_4

$$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \\ \hline \begin{array}{c|ccc|c} x_2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ x_1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad 5 \quad 21 \end{array}$$

En este caso debería entrar x_3 , pero $y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0$. Por tanto, tenemos solución ilimitada

$$x = \bar{x} + \mu d_3, \text{ donde } d_3 = \begin{pmatrix} -y_3 \\ e_3 \end{pmatrix} \text{ y } \mu \in \mathbb{R}, \text{ verificando } \mu > 0. \text{ Con lo que tenemos}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Lo que deja al pasarlo a las dos variables del problema y poniendo}$$

los vectores de forma horizontal, la solución $(3, 5) + \mu(1, 0)$ con $\mu > 0$.

Ejemplo 4.3

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Introducimos variables de holgura.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

La primera tabla queda:

		1	1	0	0	
x_3	0	1	1	1	0	4
x_4	0	-1	1	0	1	1
		-1	-1	0	0	0

Como tenemos empate, pueden entrar tanto x_1 como x_2 . Elegimos x_1 (orden lexicográfico).

Sale x_3

		1	1	0	0	
x_1	1	1	1	1	0	4
x_4	0	0	2	1	1	5
		0	0	1	0	4

Ya estamos en el óptimo, que es $(4, 0)$, pero tenemos coste reducido no básico igual a cero ($z_2 - c_2 = 0$), con lo que hay una posible solución múltiple. Por ello introducimos a x_2 en la base y sale x_4 .

		1	1	0	0	
x_1	1	1	0	1/2	-1/2	3/2
x_2	1	0	1	1/2	1/2	5/2
		0	0	1	0	4

Así obtenemos otra solución óptima $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. Por lo que la solución del problema es

$$\lambda(4, 0) + (1 - \lambda)\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

con $\lambda \in [0, 1]$.

Observación 4.11 Obsérvese que en la segunda tabla óptima se verifica que el coste reducido no básico $z_4 - c_4 = 0$, lo que es lógico y nos indica que si introducimos x_4 en la base obtenemos otra solución óptima, que sería la que encontramos en primer lugar.